

# La cosmologie et la relativité générale par les mathématiques et la physique du lycée

## Exemple d'une séquence sur l'effet de lentille gravitationnelle

Alicia Gasparini, Université de Genève

### Le Cadre

À l'occasion du centenaire de la relativité générale (novembre 2015), le pôle national de recherche SwissMAP (« The Mathematics of Physics ») a lancé un projet pédagogique visant à introduire auprès des élèves des écoles secondaires (collèges, gymnases, lycées) les notions de base de la relativité générale et de la cosmologie. Ce projet a abouti à un cours et un livre <sup>1</sup> sur ces sujets, dont l'originalité est celle d'avoir un niveau de transposition se situant entre le « zéro équations » adressé au large public et la géométrie tensorielle réservée aux spécialistes universitaires : il se base uniquement sur les notions de mathématiques et physique enseignées au secondaire post obligatoire. Le but de ce projet n'est donc pas de remplacer les contenus traditionnellement enseignés dans les lycées, mais plutôt de les consolider tout en traitant des contenus motivants pour les élèves.

La création de ce cours a eu la chance de s'étendre sur trois années exceptionnelles pour la cosmologie moderne avec la première détection historique des ondes gravitationnelles, et a abouti à un livre édité aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. Ce manuel comprend 9 chapitres, allant de l'introduction à l'astrophysique jusqu'aux ondes gravitationnelles, en passant par l'effet de lentille gravitationnelle, les trous noirs et les équations cosmologiques. Sept annexes complètent le cours afin d'intégrer et/ou d'approfondir les notions complémentaires dont l'élève pourrait avoir besoin pour une compréhension aisée du cours principal. Chaque chapitre possède une série d'exercices y relatifs avec leur correctif, ces documents sont librement disponibles sur le site SwissMAP.

Ce cours peut être dispensé dans sa version intégrale sur deux semestres à raison de 2 périodes par semaine, par exemple dans le cadre d'un cours à option complémentaire. Mais il constitue également une « boîte à outils », où les contenus et/ou les exercices peuvent être choisis de manière ponctuelle, et insérés selon le niveau dans un cours « traditionnel » de physique et application des mathématiques.

De plus, les sujets traités constituent une base idéale pour le développement de travaux de maturité ou simplement une lecture pour toute personne ayant les bases en physique et mathématiques et une curiosité pour les sujets traités.



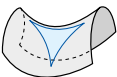
### Exemple de parcours thématique : Effet de lentille gravitationnelle

Nous présentons ici une proposition de séquence sur l'effet de lentille gravitationnelle, sujet introduit dans le chapitre 5, en tant qu'exemple d'application remarquable des idées à la

base de la relativité générale.

Le chapitre 4 introduit les notions de courbure de Gauss en un point et de courbure totale d'une surface <sup>2</sup> à deux dimensions et vise à se familiariser avec propriétés des surfaces courbes, en particulier avec le comportement des géodésiques parallèles.

Tableau récapitulatif des propriétés des espaces courbes

Courbure	positive	nulle	négative
Exemple d'espace 2D	sphère 	plan 	selle 
Propriété	fermé	euclidien	ouvert
Géodésiques parallèles	convergent	ne se croisent jamais	divergent
Périmètre du cercle de rayon $r$	$< 2\pi r$	$= 2\pi r$	$> 2\pi r$
Surface de la sphère de rayon $r$	$< 4\pi r^2$	$= 4\pi r^2$	$> 4\pi r^2$
Volume de la sphère de rayon $r$	$< \frac{4}{3}\pi r^3$	$= \frac{4}{3}\pi r^3$	$> \frac{4}{3}\pi r^3$
Somme des angles du triangle	$> 180^\circ$	$= 180^\circ$	$< 180^\circ$

Une attention particulière est prêtée à la surface représentant le potentiel gravitationnel d'une concentration de masse/énergie à symétrie sphérique, où la courbure est positive dans la partie centrale (en jaune dans la figure ci-dessous) et négative dans la zone périphérique (verte dans la figure ci-dessous). Nous pouvons constater cette propriété à l'aide d'un plastique représentant la forme du potentiel et d'un ruban coloré : deux géodésiques parallèles divergent si elles passent dans la zone à courbure négative, elles convergent si elles passent dans la zone à courbure positive.

La relativité générale de Einstein a introduit l'idée que la présence de masse/énergie déforme l'espace-temps et dévie

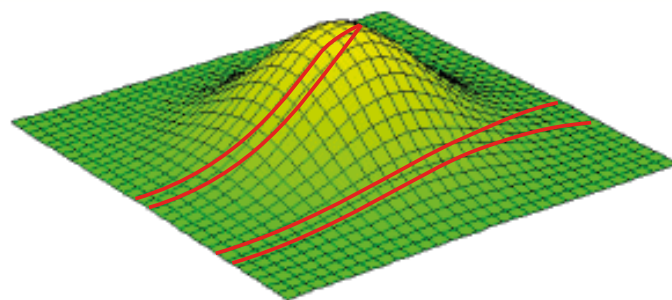


Figure 1 : Le potentiel gravitationnel d'une concentration de masse/énergie à symétrie sphérique dans une espace bidimensionnel. Les géodésiques parallèles divergent là où la courbure est négative, convergent là où elle est positive.

<sup>1</sup> A. Gasparini, *Cosmologie & relativité générale, Une première approche*, PPUR (2018).

<http://www.ppur.org/produit/876/9782889152094/Cosmologie%20%20relativite%20generale%20>

A. Gasparini & A. Müller, *Cosmologie & relativité générale, Activités pour les élèves du Secondaire II*, SwissMAP, Université de Genève (2017).

<http://nccr-swissmap.ch/education/highschool/GRCourse>

<sup>2</sup> En relativité générale, la notion de surface s'étend à tout espace de dimension supérieure à deux.

la lumière. Par analogie avec l'effet des lentilles optiques, on nomme « lentille gravitationnelle » une concentration de masse (par exemple une galaxie, un trou noir ou une étoile massive) qui a pour effet de dévier la lumière. Dans le chapitre sur l'effet de lentille gravitationnelle, la question est donc de trouver l'expression de l'angle de déviation  $\alpha$  de la trajectoire d'un rayon de lumière passant près d'une masse *grave*.

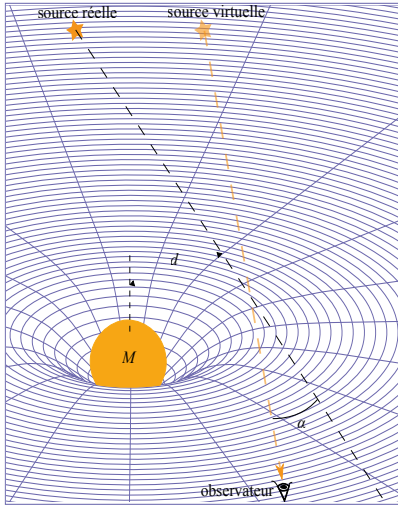


Figure 2 : La trajectoire d'un rayon de lumière provenant d'une source lointaine suit la déformation de l'espace-temps par une masse *M*.

### Approches simplifiées

Ce problème peut être abordé de plusieurs manières. Le premier exercice de la série 5 utilise l'analyse dimensionnelle et permet de trouver la formule de  $\alpha$  de manière simple, sans facteur numérique. Pour résoudre l'exercice, nous pouvons schématiser la situation : un rayon de lumière provenant d'une source lointaine s'approche d'une masse *M*, sa trajectoire est déviée par la présence

de la masse (figure 2). De quels paramètres peut dépendre cette déviation ?

On peut aisément citer l'accélération de la gravité  $g = GM/d^2$  (*G* étant la constante de la gravitation), la vitesse de la lumière *c*, et la « distance » de passage *d*, soit la distance entre la masse *M* et la droite représentant la direction de provenance du rayon. Autrement dit le « paramètre d'impact », concept très important en physique car tout autant central que transversal.

Pour trouver l'angle de déviation, on cherche une combinaison de puissances entières de ces paramètres (*p*, *q* et *r*), telle que les unités se compensent car l'unité des angles est adimensionnelle

$$\alpha_g \propto g^p \cdot d^q \cdot c^r$$

$$\begin{aligned} & [m \cdot s^{-2}]^p \cdot [m]^q \cdot [m \cdot s^{-1}]^r = 1 \\ \Rightarrow & m^p \cdot s^{-2p} \cdot m^q \cdot m^r \cdot s^{-r} = 1^0 \Rightarrow m^{p+q+r} \cdot s^{-2p-r} = 1^0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} p+q+r=0 \\ -2p-r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=-2p \\ p+q-2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=-2p \\ q=p \end{cases} \end{aligned}$$

La solution la plus simple non nulle est donnée par  $p = 1$ ,  $q = 1$  et  $r = -2$  :

$$\alpha_g \propto g^1 \cdot d^1 \cdot c^{-2} = \frac{GM}{d^2} d \cdot c^{-2} = \frac{GM}{c^2 d}$$

Cette formule diffère d'un facteur 4 de celle obtenue en utilisant les équations tensorielles d'Einstein  $\alpha_{gE} = 4GM/c^2 d$ , mais elle est beaucoup plus accessible. Une dérivation de la formule de l'angle de déviation à partir de la physique newtonienne se trouve dans la section 5.1 du livre : cette démonstration est plus avancée car elle demande une connaissance aisée du formalisme vectoriel, de la dérivation et de l'intégration des fonctions, et elle donne une for-

mule de l'angle de déviation :  $\alpha_{gN} = 2GM/c^2 d$ , qui diffère d'un facteur 2 par rapport à celle relativiste. Ce facteur 2 a une importance historique, notamment dans les mesures de l'angle de déviation de la lumière faites par Eddington lors de l'éclipse totale solaire de 1919. Bien que peu précise, ce fut cette expérience qui rendit Einstein célèbre.

### L'analogie optique

Ainsi, la simple dérivation dimensionnelle permet d'inférer la dépendance inverse  $\alpha_g \propto 1/d$ , qui constitue la clé pour comprendre le phénomène de lentille gravitationnelle. Il est utile d'analyser la situation analogue d'une lentille optique convergente, où la dépendance linéaire de la distance entre le rayon incident et l'axe optique  $\alpha_o \propto d$  mène à la présence d'un foyer optique, comme illustré dans la figure ci-dessous. D'autre part, puisque dans le chapitre 4 nous avons pu constater que la courbure est négative autour d'une masse avec un potentiel gravitationnel à symétrie sphérique (figure 1), nous avons les éléments pour comprendre que la déviation en  $1/d$  traduit le comportement divergent des géodésiques parallèles.

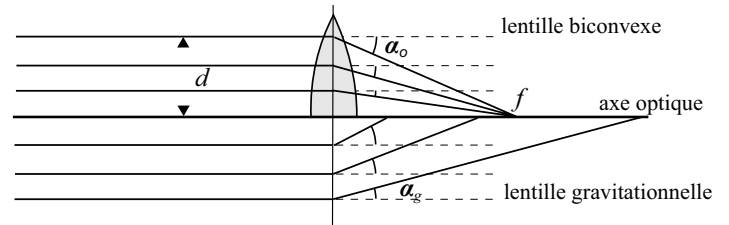


Figure 3 : Comparaison de l'effet d'une lentille gravitationnelle avec celui d'une lentille optique convergente, sur des rayons parallèles.

La question de savoir s'il existe une forme de lentille optique capable de reproduire cette déviation en  $1/d$  surgit spontanément, et la réponse se trouve dans l'exercice 7 de la série 5, où les lois de la réfraction et une intégration sont déployées pour obtenir cette dépendance : un profil d'allure logarithmique, semblable à celui d'un « pied de verre à vin » est celui recherché.

L'idée est que, en supposant l'approximation des « petits angles » ( $\sin \alpha \cong \alpha$ ), si l'angle de réfraction *r* est proportionnel à l'angle d'incidence *i*, et si l'on veut qu'en s'approchant de l'axe optique (l'axe *y* dans la figure 4) la déviation augmente (*r* augmente) comme on le voit dans la figure 3, on doit avoir un profil qui forme un angle toujours plus grand avec le rayon incident (direction de l'axe *y*).

L'expérience permettant de visualiser l'image d'une source ponctuelle à travers la reproduction optique d'une lentille

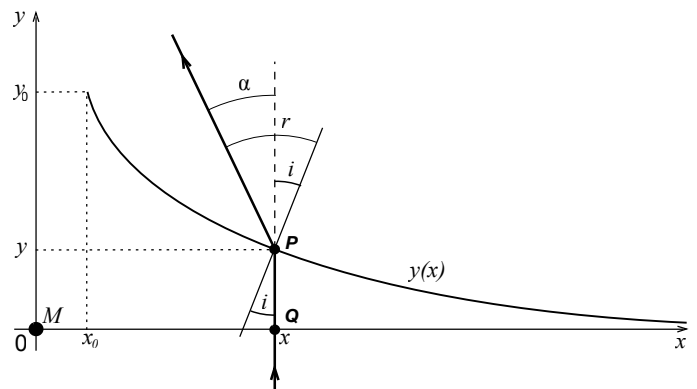


Figure 4 : Trajectoire d'un rayon de lumière passant au travers d'une lentille optique avec un profil de « pied de verre à vin ».

gravitationnelle est une activité qui peut facilement être pratiquée.

Ainsi, il est possible de « tester » les conditions pour l'observation d'un anneau, d'une croix d'Einstein ou d'arcs gravitationnels (ces derniers comme dans la figure 5).

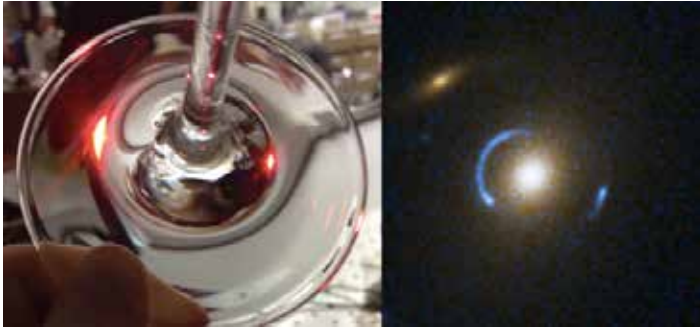


Figure 5 : À gauche, une image de source ponctuelle vue au travers d'un pied de verre à vin. À droite, la l'image de lentille gravitationnelle SDSS J120540.43+491029.3. [Crédit: Hubble, NASA.] La similitude entre les images lumineuses de la source est clairement visible.

Dans le cas d'alignement entre observateur O, lentille L et source S, la formule donnant le rayon d'Einstein  $\theta$  (il s'agit bien d'un angle même s'il est appelé « rayon ») en fonction de la masse de la lentille et des distances entre la source et la lentille s'obtient à partir de celle de l'angle de déviation, en utilisant la loi des sinus et l'approximation des petits angles.

$$\theta \cong \sqrt{\frac{4GM \cdot D_{SL}}{c^2 D_{SO} \cdot D_{LO}}}$$

La formule ci-dessus est démontrée dans la section 5.3 du livre et utilisée par les astronomes pour estimer la masse

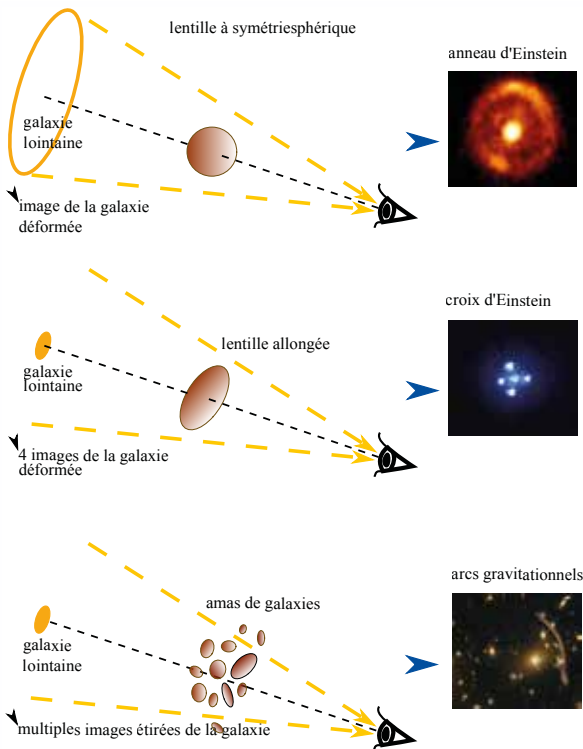


Figure 6 : Schématisation des trois types de strong lensing, permettant d'observer des images d'anneaux, croix d'Einstein, ou d'arcs gravitationnels. Crédit: Hubble, NASA.

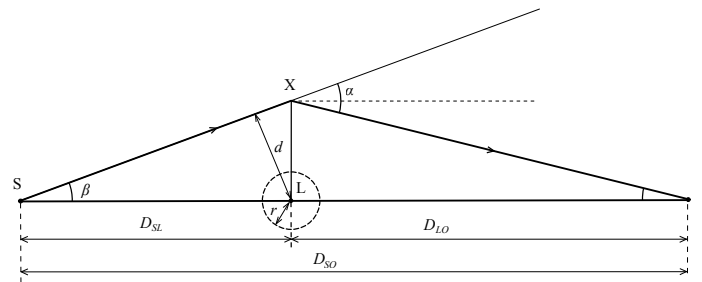


Figure 7 : Schématisation du parcours d'un rayon de lumière dans une situation de strong lensing donnant lieu à un anneau ou une croix d'Einstein : le point S représente la source de lumière (une galaxie lointaine), le point O l'observateur et L est la lentille (une galaxie ou un amas de galaxies). La révolution de 360° autour de l'axe OS du point X représente l'image virtuelle de la source S, sous forme d'anneau. L'angle d'observation  $\theta$  est nommé « rayon d'Einstein ».

de la lentille, y compris celle de la matière noire, puisque c'est la masse grave de la lentille qui cause le phénomène. En effet, les distances peuvent être estimées à partir des redshifts de la source et de la lentille et le rayon d'Einstein est une quantité mesurable, normalement inférieure à la seconde d'arc. Des exercices d'applications de cette formule se trouvent dans la série relative au chapitre 6.

### Plusieurs parcours thématiques

En conclusion, la séquence que nous avons parcourue montre comment, en s'appuyant d'une part sur l'intérêt du lecteur pour l'astrophysique et la cosmologie, d'autre part sur ses connaissances mathématiques de base, il est possible d'expérimenter un chapitre de la physique moderne. Elle n'est qu'un exemple des nombreux parcours possibles à partir du matériel disponible dans le cours. En effet, l'ordre et le choix des activités concernant un thème spécifique (ici l'effet de lentille gravitationnelle) est flexible et peut s'adapter aux contraintes liées à l'enseignement et/ou au niveau du public : le cours contient un choix d'exercices à développer au travers des chapitres sur le principe d'équivalence, sur la courbure et sur l'effet de lentille gravitationnelle, y compris les aspects historiques. En outre, des thèmes parcourent de manière transversale l'ensemble du cours et constituent un « fil rouge » qui aide le lecteur à s'approprier des contenus tout au long de différents chapitres, en consolidant leurs notions de base en mathématiques et en physique. Par exemple le thème « comparaison entre l'interaction gravitationnelle et électrique » débute au premier chapitre en introduisant les ordres de grandeurs en jeu dans les deux interactions, il est ensuite repris dans les chapitres sur le principe d'équivalence (pour introduire les notions de base de la relativité générale) et sur la chronologie du Big Bang (en comparant gravitation à et électromagnétisme à l'interaction nucléaire forte) puis ultérieurement développé dans le chapitre sur les ondes gravitationnelles. Ou encore le thème « expansion de l'univers » introduit dans les premiers deux chapitres les découvertes observationnelles de l'expansion, du fond diffus cosmologique, et celle plus récente de l'accélération cosmique : en avançant dans les chapitres, la modélisation mathématique permet de décrire la dynamique de l'univers et les implications théoriques des observations, jusqu'à l'introduction récente de modèles encore hypothétiques qui essaient de résoudre les problèmes observationnels actuels (inflation, gravité modifiée).