Introduction à la théorie des ensembles

par Alice Gasparini

Table des matières

Première partie

La théorie des ensembles

1 Introduction

En mathématiques on utilise le mot **“ensemble”** pour indiquer un regroupement, une collection d'**éléments**. Ces éléments peuvent être des objets, des individus, des symboles, des formes géométriques, etc. Il est important de remarquer que **les éléments d'un ensemble doivent être distincts entre eux**.

Nous allons travailler avec les ensembles qui sont mathématiquement bien définis : **un ensemble est bien défini quand nous pouvons sans ambiguité établir si un élément appartient ou pas à cet ensemble.**

Par exemple, les ensembles suivants sont bien définis :
— l'ensemble des cantons de Suisse,
— l'ensemble des élèves d'une classe,
— l'ensemble des voyelles de l'alphabet francais,
— l'ensemble des montagnes de Suisse plus hautes que 2500 m,
— l'ensemble de nombres entiers compris entre 0 et 10.
Par contre, l'ensemble des élèves sympathiques d'une école n'est pas bien défini, car la sympathie est un critère subjectif qui peut varier d'une personne à l'autre. Il n'est donc pas possible de définir avec précision un tel ensemble. De même, l'ensemble des grands lacs d'Amérique n'est pas bien défini, car la notion de "grand" n'est pas précise.

• *Donner d'autres exemples d'ensembles bien définis.*

Notation : On indique les ensembles avec des lettres majuscules : A, B, C, ..., X, Y, ... ; les éléments d'un ensemble se notent avec des lettres minuscules : a, b, c, ..., x, y, ... [1].
Pour indiquer qu'un point a appartient à l'ensemble A , on utilise le **symbole d'appartenance** $\in$, on note

$$a \in A$$

qui se lit "a appartient à A." Pour indiquer qu'un élément x n'appartient PAS à un ensemble A, on écrit

$$x \notin A,$$

qui se lit "x n'appartient pas à A."

2 Les représentations des ensembles

Nous pouvons représenter les ensembles de trois manières différentes :

1. par une représentation **géométrique** ;

2. par une représentation **tabulaire** ou **"extensive"** ;

3. par une représentation indiquant une propriété des élément , dite **caractéristique** ou **"intensive"**.

1. Cette convention est contraire à celle de la géométrie, où les points sont indiqués par des lettres majuscules, alors que les ensembles de points (les surfaces, les droites) sont notés par des lettres minuscules.

2.1 La représentation géométrique

Pour représenter un ensemble de manière géométrique on utilise des diagrammes (appelés diagrammes de Venn). On marque avec des points les élément de l'ensemble en indiquant le nom de l'élément à côté du point correspondant. On entoure ces points avec une boucle (un cercle ou un ellipse). Les éléments qui n'appartiennent pas à l'ensemble sont représentés par des points extérieurs à la boucle. Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, **dans la représentation d'un ensemble, ses éléments doivent être distincts et ils y doivent figurer une seule fois.**

• *Représenter géométriquement l'ensemble C des consonnes du mot étudiant.*

2.2 La représentation tabulaire

Sans faire de dessin, nous pouvons faire une "liste" des éléments d'un ensemble, en les séparant par un point-virgule et en les entourant par des accolades. Cette représentation s'appelle **représentation tabulaire**. Par exemple, si X est l'ensemble des nombres naturels à un seul chiffre, nous écrivons

$$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

• *Ecrire une représentation tabulaire de l'ensemble C de l'exemple précédent (§2.1).*

Pour certains ensembles on écrit la représentation tabulaire même si le nombre d'éléments qu'il contient est infini. On utilise alors des points de suspension. Par exemple l'ensemble des **nombres naturels** est

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}.$$

L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}.$$

2.3 La représentation caractéristique

Pour certains ensembles, il est pratique et utile de pouvoir transformer une représentation tabulaire en une phrase en francais. Par exemple, on peut dire que l'ensemble $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$ est l'ensemble des nombres naturels compris entre 1 et 5. On peut donc utiliser une nouvelle représentation :

$$A= \{\ x/x \textit{ est un nombre naturel compris entre 1 et 5}\ \}$$

On lit [2] "L'ensemble A est formé de tous les éléments x tels que x est un nombre naturel compris entre 0 et 5". **Cette représentation s'appelle "caractéristique" car elle met en évidence une propriété, ou une caractéristique, de tous les éléments de l'ensemble**. Elle est particulièrement utile quand on veut représenter des ensembles infinis, ou difficilement dénombrables.

La représentation caractéristique de l'ensemble

$$A= \{\ \mathrm{a}\ ;\ \mathrm{e}\ ;\ \mathrm{i}\ ;\ \mathrm{o}\ ;\ \mathrm{u}\ ;\ \mathrm{y}\ \}$$

est

$$A= \{\ x/x \textit{ est une voyelle de l'alphabet francais}\ \}.$$

Pour représenter l'ensemble B des points d'une droite $\mathbf{r}$ (infinie), on peut écrire

$$B= \{\ x/x \textit{ est un point appartenant à la droite } \mathbf{r}\ \}.$$

La représentation caractéristique de l'ensemble

$$X= \{\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ \}$$

est

2. La ligne verticale "|" se lit "tel que"

$$X= \{\ x/x < 4 \ et\ x \in \mathbb{N}\ \},$$

qui se lit “L’ensemble X est formé de tous les éléments x tels que x est un nombre naturel plus petit que 4.”

Nous pouvons également représenter les ensembles des exemples du §2.2 :

$$\mathbb{N}=\{x/x \text{ est un nombre entier positif}\}.$$

$$\mathbb{Z}=\{x/x \text{ est un nombre entier relatif}\}.$$

- *Ecrire une représentation caractéristique pour l’ensemble B={0 ;2 ;4 ;6 ;8}.*

3 Quelques ensembles particuliers

3.1 Ensembles égaux

Deux ensembles sont égaux s’ils sont formés par les mêmes éléments, ou plus précisément : **deux ensembles A et B sont égaux si chaque élément qui appartient à A appartient aussi à B, et vice-versa.**

Par exemple, l’ensemble des cartes d’un jeu et égal à l’ensemble des mêmes cartes après les avoir mélangées. Les ensembles

$$A=\{x/x \text{ est une lettre du mon “chien”}\}$$

$$B=\{x/x \text{ est une lettre du mot “niche”}\},$$

sont égaux : $A=B$.

3.2 Les ensembles finis et infinis

On dit qu'un ensemble est fini quand il a un nombre fini d'éléments. En d'autres termes, si l'on compte ses éléments, le comptage a une fin. Comme déjà vu auparavant, quand il n'est pas possible de faire une liste tabulaire de tous les éléments d'un ensemble, car cette liste ne finirait jamais, on dit que l'ensemble est **infini**. Cela est le cas pour l'ensemble de nombres naturels, $\mathbb{N}$, ou l'ensemble des points d'une droite (ensemble X de l'exemple du paragraphe 2.3).

3.3 L'ensemble vide

Si un ensemble contient deux éléments on l'appelle **couple**, s'il possède un seul élément il s'appelle **singleton**. Un ensemble qui n'a aucun élément est appelé **ensemble vide**, il est noté $\varnothing$ ou $\{\}$. **Puisque tous les ensembles vides ont les mêmes éléments, ils coïncident (ils sont tous égaux).**

L'ensemble des satellites de la terre est formé uniquement par la lune.
L'ensemble des nombres qui sont à la fois premiers et pairs est constitué par un seul nombre : 2 .
Il s'agit dans les deux cas de singletons.

L'ensemble A des élèves de 4 ans qui sont dans une classe d'une école secondaire, l'ensemble B des mers de Suisse, ou encore l'ensemble C de nombres impairs qui se terminent par le chiffre 6, sont des ensembles vides, et on a $A = B = C = \varnothing$.

- *Donner d'autres exemples d'ensembles vides.*

3.4 L'ensemble univers

Quand on définit un ensemble, soit par une propriété caractéristique de ses éléments, soit par une liste, il est parfois important de définir également le contexte, le milieu dans lequel on choisit les éléments. Par exemple, l'ensemble $X = \{ x / x < 4 \}$ a des éléments différents (et donc est un ensemble différent) selon que ses éléments x sont choisis parmi des nombres naturels, des nombres entiers relatifs ou des nombres décimaux. Il serait donc plus juste d'écrire

$$X_1 = \{ x/x < 4 \text{ et } x \in \mathbb{N} \} \text{ ou } X_2 = \{ x/x < 4 \text{ et } x \in \mathbb{Z} \}$$

ou encore

$$X_3 = \{ x/x < 4 \text{ et } x \in \mathbb{D} \}$$

L'ensemble des éléments parmi lesquels ceux d'un ensemble donné sont choisis s'appelle **ensemble univers** ou **ensemble total** et il se note $\mathcal{U}$. En terme de diagrammes, l'ensemble univers est souvent représenté au moyen d'un grand rectangle qui contient les boucles représentant l'ensemble.

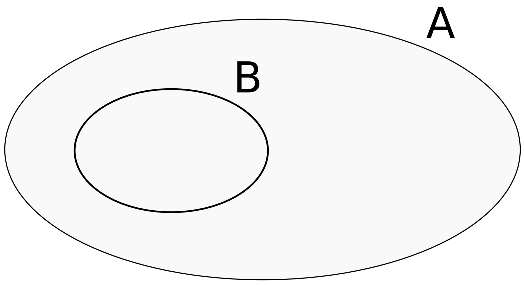
• *Représenter graphiquement l'ensemble des voyelles et son ensemble univers.*

4 Les sous-ensembles

Considérons l'ensemble $A = \{x/x$ *est un canton de Suisse.*$\}$ Dans cet ensemble, nous pouvons en particulier distinguer les cantons où la langue officielle est le francais. Ces cantons forment un nouvel ensemble, B qui est un **sous-ensemble** de A. De la même manière, les maîtres d'allemand d'une école forment un sous-ensemble D de l'ensemble C de tous les maîtres de l'école.

Il est important d'observer que, dans les deux exemples, tous les éléments du sous-ensemble B appartiennent aussi à A. En effet, tous les cantons romands sont aussi des cantons suisses (et tous les maîtres d'allemand, sont des maîtres). Toutefois le contraire n'est pas vrai : un élément qui appartient à A n'appartient pas nécessairement à B. Pensons au Tessin, canton suisse, mais pas romand (et à tous les profs de franccais, qui font partie des maîtres de ton école, l'ensemble C, mais qui ne font pas partie de l'ensemble des profs d'allemand, D).

Ainsi B **est un sous-ensemble de** A **si chaque élément de** B **appartient aussi à** A**, mais pas forcément le contraire.** Dans ce cas, on écrit $B \subseteq A$ qui se lit *"l'ensemble B est inclus dans (B est sous-ensemble de) A"*, ou $A \supseteq B$ qui se lit *"l'ensemble A contient B"*.



• *Représenter graphiquement les ensembles* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Z}$ *des exemples des §2.2 et §2.3. Lequel est sous-ensemble de l'autre ?*

4.1 Les sous-ensembles propres et impropres

Dans certains cas particuliers, les sous-ensembles peuvent coïncider avec l'ensemble qui les contient ou avec l'ensemble vide. Dans ces cas triviaux on appelle le sous-ensemble en question **sous-ensemble impropre**. Dans tous les autres cas on parle de **sous-ensembles propres**.

Considérons l'ensemble Ades élèves d'une classe donnée, et définissons le sous-ensemble B= { *x/x est élève de la classe mesurant plus que 180* *cm* }. Si aucun élève ne mesure plus que 180 cm, le sous ensemble B est l'ensemble vide : B=∅. On dit alors que ce sous-ensemble est impropre.

De même, si tous les élèves de la classe dépassent les 180 cm, le sous-ensemble B et l'ensemble des élèves A sont le même ensemble. Ils coïncident : A=B. À nouveau, on dit que B est un sous-ensemble impropre.

Ainsi, B n'est pas impropre (et donc il est propre) seulement s'il existe des élèves qui appartiennent à A mais n'appartiennent pas à B. En d'autres mots A et B ne sont pas les mêmes ensembles, et B n'est pas vide.

Si B est un sous-ensemble propre de A, on peut remplacer les symboles $\subseteq$ et $\supseteq$ par les symboles $\subset$ et $\supset$. On écrit alors $B \subset A$ qui se lit *"l'ensemble B est strictement inclus dans A"* , ou $A \supset B$ qui se lit *"l'ensemble A contient strictement B"*.

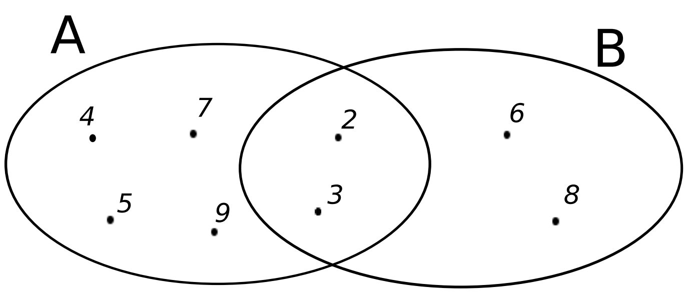
5 Les opérations avec les ensembles

5.1 L'ensemble intersection

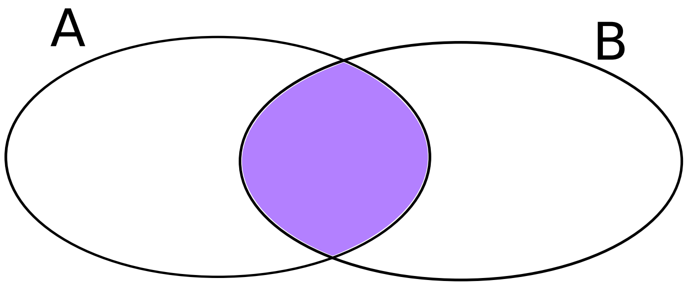
Considérons les deux ensembles :
A= {**2**; **3**; 4; 5; 7; 9} et B= {1; **2**; **3**; 6; 8}.
Les nombres **2** et **3** sont des éléments qui appartiennent **en même temps** au premier et au deuxième ensemble : c'est à dire $2; 3 \in A \quad et \quad 2; 3 \in B$.
Ils forment un troisième ensemble C qui s'appelle **intersection** de A et B, et on l'indique avec l'écriture

$$C = A \cap B = \{2; 3\}.$$

Voici sa représentation graphique :



De manière générale, **l'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble C formé par les éléments qui sont communs à A et à B.**



$$A \cap B = \{x / x \in A \ \ et \ x \in B\}$$

Considérons l'ensemble A des élèves d'une classe qui pratiquent la natation et l'ensemble B des élèves de cette classe qui pratiquent le tennis. L'intersection des deux ensembles est formé par les élèves qui pratiquent les deux sports.

La définition d'intersection peut se généraliser à trois ensembles ou plus.

Cherchons l'intersection entre les ensembles suivants :

$$A = \{\ 1\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 10\,;\ 13\ \}$$

$$B = \{\ 1\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 10\,;\ 12\ \}$$

$$C = \{\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 6\,;\ 7\,;\ 8\,;\ 11\ \}.$$

On a que :

$$A \cap B = \{1; 7; 8; 10\}.$$

L'intersection entre les trois ensembles A ,B et C est le couple

$$A \cap B \cap C = \{7; 8\}.$$

- *Représenter graphiquement les ensembles A ,B C et leur intersection*

Considérons enfin le deux ensembles

$$A = \{\ 1\,;\ 3\,;\ 5\,;\ 7\,;\ 9\ \} \text{ et } B = \{\ 2\,;\ 4\,;\ 6\,;\ 8\ \},$$

qui n'ont aucun élément en commun : $A \cap B = \varnothing$. On dit que ces deux ensembles sont **disjoints**.

Deux ensembles A et B sont disjoints si ils n'ont aucun élément en commun, soit $A \cap B = \varnothing$.

5.2 L'ensemble union

Considérons les deux ensembles

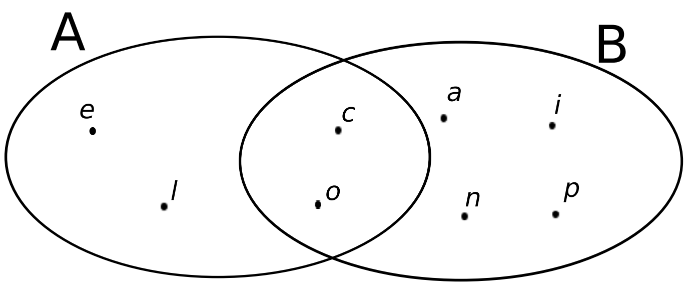
$$A = \{x/x \textit{ est une lettre du mot "école"}\ \} = \{\ \mathrm{c}\,;\ \mathrm{e}\,;\ \mathrm{l}\,;\ \mathrm{o}\ \}$$

$$B = \{x/x \textit{ est une lettre du mot "copain"}\ \} = \{\ \mathrm{a}\,;\ \mathrm{c}\,;\ \mathrm{i}\,;\ \mathrm{n}\,;\ \mathrm{o}\,;\ \mathrm{p}\ \}.$$

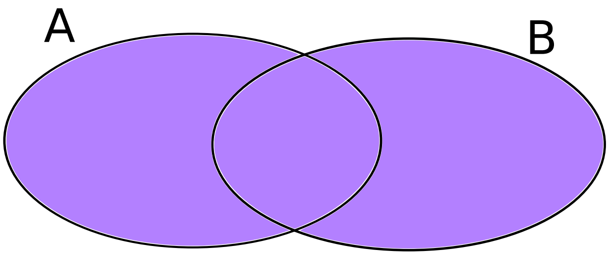
L'ensemble

$$C = \{\ \mathrm{a}\,;\ \mathrm{c}\,;\ \mathrm{e}\,;\ \mathrm{i}\,;\ \mathrm{l}\,;\ \mathrm{n}\,;\ \mathrm{o}\,;\ \mathrm{p}\ \}$$

qui a pour éléments toutes les lettres qui appartiennent à A ou à B, en prenant une seule fois celles qui appartiennent aux deux ensembles, s'appelle l'**union** des deux ensembles A et B.



On appelle "ensemble union" de deux ensembles A et B l'ensemble formé par tous les éléments qui appartiennent au moins à un de deux ensembles A ou B, en prenant une seule fois les éléments qui appartiennent aux deux ensembles en même temps.

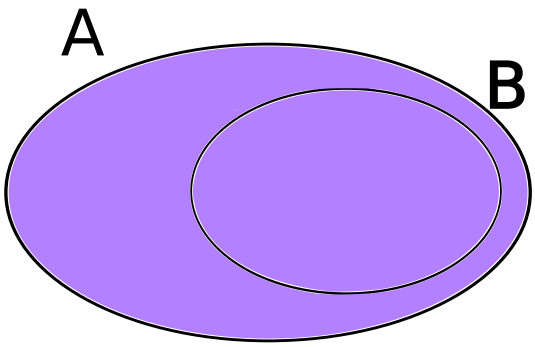


$A \cup B = \{x/x \in A \ \ ou \ x \in B\}$

Nous observons que si les ensembles A et B sont disjoints, l'ensemble union de ces deux ensembles est formé par tous les éléments de ces deux ensembles.

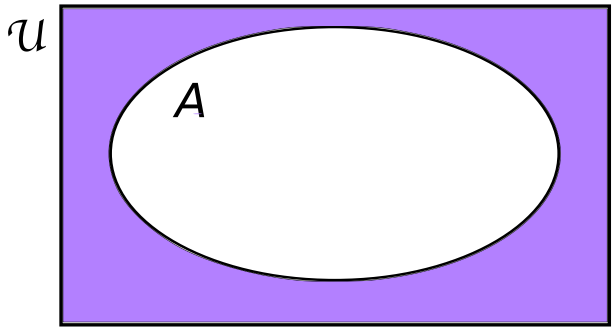
Si enfin l'ensemble B est sous-ensemble de A , alors l'union de A et B coïncide avec l'ensemble A . En d'autres mots :

si $A \supseteq B$, **alors** $A \cup B = A$.



5.3 L'ensemble complémentaire

On définit le complémentaire d'un ensemble A, par rapport à un ensemble univers $\mathcal{U}$, comme l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{U}$ qui n'appartiennent pas à A.
Un tel ensemble est noté $C_U A$ ou $\bar{A}$, et se lit "complémentaire de A par rapport à $\mathcal{U}$".



Partie grisée : le complémentaire de A par rapport à $\mathcal{U}$.

Un conséquence de cette définition de l'ensemble complémentaire est que le "complémentaire du complémentaire" d'un ensemble A est A lui même et on note : $\bar{\bar{A}} = A$.

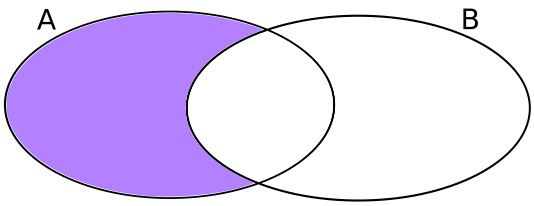
> Dans l'ensemble univers des lettres de l'alphabet, le complémentaire de l'ensemble des voyelles est l'ensemble des consonnes.

- *Quel est l'ensemble complémentaire de*

$$A = \{ x / x > 6,\ x \in \mathbb{N} \} = \{ 7 ;\ 8 ;\ 9 ;\ 10 ;\ ..... \} \ ?$$

5.4 L'ensemble différence

On appelle **ensemble différence de deux ensembles** A **et** B **, pris dans cet ordre, l'ensemble qui contient les éléments appartenant à** A **mais pas à** B. Il est noté $A \ / \ B$ et il est le résultat d'une opération entre ensembles : la **soustraction d'ensembles**.



En grisé : la différence de deux ensembles A et B.

Soit A={ a ; b ; c ; d ; e } et B= { c ; e ; f }. L'ensemble différence de A et B est A / B = { a ; b ; d }.

- *Determiner l'ensemble A - B , avec*

B= { x/x est un losange }
A= { x/x est un carré }

5.5 Les propriétés des opérations avec les ensembles

Les opérations intersection, union et complémentarité possèdent des propriétés suivantes :

1. Directement des définitions de l'intersection et de l'union, on voit que

$$A \cap A = A \quad et \quad A \cup A = A.$$

Dans ces cas, on dit donc que l'union et l'intersection sont des opérations **idempotentes**.

2. Comme pour l'addition et la multiplication des nombres, l'union et l'intersection sont des opérations **commutatives :**

$$A \cap B = B \cap A \quad et \quad A \cup B = B \cup A.$$

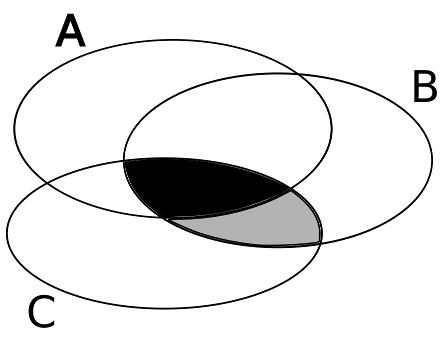
3. De même, comme pour la multiplication et l'addition des nombres, l'union et l'intersection possèdent la propriété de **l'associativité** :

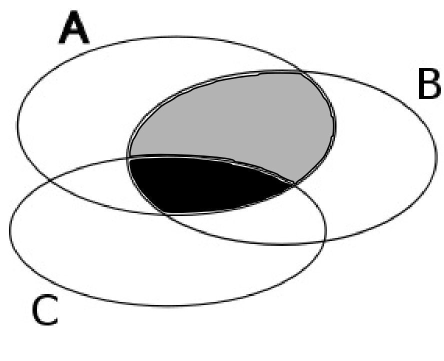
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

et

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Nous allons vérifier graphiquement la propriété associative de l'intersection. Nous allons dessiner d'abord l'ensemble $A \cap (B \cap C)$. Pour ce faire il faut d'abord déterminer l'ensemble $(B \cap C)$, qui est l'ensemble grisé ci-dessous à gauche. L'intersection de cet ensemble avec A est donc la partie noire de cet ensemble. Représentons maintenant $(A \cap B) \cap C$: $(A \cap B)$ est l'ensemble grisé dans la figure ci-dessous à droite son intersection avec C est donc la partie noircie de la même figure. Si on compare les deux figures on constate que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.





• *De manière analogue vérifier graphiquement la propriété associative de l'union (commencer par dessiner $A \cup (B \cup C)$).*

4. Les **lois d'absorption** :

$$A \cap (A \cup B) = A \quad et \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

- *Vérifier graphiquement que $A \cup (A \cap B) = A$.*

5. De manière analogue à la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition [3], il existe la propriété de **la distributivité de l'intersection sur l'union** :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

et **la distributivité de l'union sur l'intersection** :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- *Vérifier graphiquement la distributivité de l'intersection sur l'union (commencer par dessiner $A \cap (B \cup C)$).*

3. Par exemple $3 \cdot (2x + 5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 = 6x + 15$.

6. Les **lois de complémentarité** :

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \quad et \quad A \cup \bar{A} = \mathcal{U}$$

- *Vérifier graphiquement les lois de complémentarité.*

7. Les **lois de De Morgan**

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad et \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- *Vérifier graphiquement que* $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

6 Exercices

Nota Bene :
- Ces exercices sont à résoudre dans le cahier.
*- Les exercices avec un * sont principalement pour les élèves de 9^e^ année*

6.1 Les ensembles et leur représentation

- **Exercice 1**

  Dire si les regroupements suivants forment des ensembles (bien définis), et expliquer pourquoi :

  1. les élèves bien élevés d'une classe ;
  2. les élèves d'une classe avec moyenne générale supérieure à 4.8 ;
  3. les belles villes de France ;
  4. les jours de décembre 2010 avec du beau temps ;
  5. les jours de décembre 2010 avec température moyenne inférieure à 0°.

- **Exercice 2**

  Représenter les ensembles suivants :

  1. l'ensemble des notes musicales ;
  2. l'ensemble des jours de la semaine ;
  3. l'ensemble de jours de la semaine qui commencent par la lettre "n" ;
  4. l'ensemble de jours de la semaine qui contiennent la lettre "f" ;
  5. l'ensemble des élèves de ton école qui ont plus que 42 ans.

- **Exercice 3**

Représenter les ensembles suivants de 3 manières différentes :

1. l'ensemble de nombres impairs inférieurs à 14 ;
2. l'ensemble des nombres pairs compris entre 9 et 21 ;
3. l'ensemble des nombres premiers compris entre 0 et 30 ;
4. l'ensemble des diviseurs de 120 ;
5. l'ensemble des consonnes du mot "hérisson".

• **Exercice 4**

Représenter les ensembles suivants par la représentation tabulaire :
— l'ensemble des consonnes du mot "charte" ;
— l'ensemble des consonnes du mot "toucher" ;
Qu'observes-tu ?

• **Exercice 5**

Représenter les ensembles suivants par la représentation tabulaire :
— l'ensemble des lettres du mot "nez" ;
— l'ensemble des lettres du mot "zen" ;
— l'ensemble A={zen} ;
Qu'observes-tu ?

• **Exercice 6**

Ecrire avec des symboles les affirmations suivantes :

1. 5 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$;
2. $\frac{2}{3}$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{N}$.

• **Exercice 7**

Considérer A l'ensemble des états européens. Peut-on dire que la Grèce $\in A$? Et que Athene $\in A$?

- **Exercice 8**

Représenter les ensembles suivants :

1. l'ensemble de nombres naturels divisibles par 6 ;
2. l'ensemble des nombres naturels multiples de 6 ;
3. l'ensemble des diviseurs de 6.

- **Exercice 9**

Représenter géométriquement les ensembles suivants :

1. l'ensemble des tous les points P qui ont la même distance, 2 cm, d'un point O donné dans le plan ;
2. l'ensemble de tous les points Q tels que $\overline{QA} = \overline{QB}$, avec A et B deux points donnés dans le plan tels que $\overline{AB}$=8 cm.

- **Exercice 10**

Donner la représentation caractéristique de ces ensembles :

A={mardi ; mercredi} ;

B={t ; r ; n} ;

C={3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; ...} ;

D={avril ; juin ; septembre ; novembre}.

- **Exercice 11**

Donner la représentation caractéristique de ces ensembles :

A={6 ; 8 ; 10 ; 12} ;

B={1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ...} ;

C={1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; ...} ;

D={1 ; 3 ; 9}.

- **Exercice 12**

Donner la représentation tabulaire des ensembles
$S = \{ \ x \in \mathbb{N} \mid x - 2 = 0\,; \}$;
$T = \{ \ x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 9 = 0\,; \}$.

- **Exercice 13**

  Parmi les ensembles ci dessous, lesquels sont égaux ?

  1. $A = \{\ x \in \mathbb{N} \ / \ x < 4\ \}$;
  2. $B = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\}$;
  3. $C = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\ \}$;
  4. $D = \{\ x \in \mathbb{N} \ / \ 0 < x < 4\ \}$;

- **Exercice 14**

  Parmi les ensembles ci-dessous, lesquels sont des ensembles finis ?

  1. l'ensemble des nombres naturels inférieurs à 30 ;
  2. l'ensemble $X = \{\ x \ / \ 3 < x < 32\ ;\ x \in \mathbb{N}\ \}$;
  3. l'ensemble des nombres impairs ;
  4. l'ensemble des points d'un cercle ;
  5. l'ensemble des sommets d'un hexagone ;

- **Exercice 15***

  Donner la représentation caractéristique de ces ensembles :

  $A = \{1\,;\,3\,;\,9\}$;

  $B = \{1\,;\,3\,;\,6\,;\,9\,;\,12\,;\,...\}$;

  $C = \{1\,;\,5\,;\,25\,;\,125\,;\,625\,;\,...\}$;

  $D = \{1\,;\,3\,;\,6\,;\,10\,;\,15\,;\,21\,;\,28\,;\,....\}$.

- **Exercice 16***

  Donner la représentation caractéristique de ces ensembles :

  — $A = \{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; ...\}$;

  — $B = \{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{16}; ...\}$.

- **Exercice 17***

  Donner la représentation tabulaire des ensembles suivants :
  $S_1 = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 = 0\ \}$;
  $S_2 = \{\ x \in \mathbb{Q} \mid 12x - 8 = 44\ \}$;
  $S_3 = \{\ x \in \mathbb{Q} \mid (x-1)(2x+1) = (x-1)(x+2) + x^2\ \}$;
  $S_4 = \{\ x \in \mathbb{Q} \mid x - 2 = x + 3\ \}$;
  $S_5 = \{\ x \in \mathbb{Q} \mid 3(x+6) = x + 4 + 2x + 14\ \}$.

6.2 Les sous-ensembles

- **Exercice 1**

  Représenter, avec des diagrammes, l'ensemble des premières 10 lettres de l'alphabet et le sous ensemble de ses voyelles.

- **Exercice 2**

  Représenter, avec des diagrammes, l'ensemble des nombres naturels inférieures à 19 et plus grands que 5, puis son sous-ensemble de nombres pairs et celui de nombres impairs.

- **Exercice 3**

  Considérer l'ensemble A=$\{1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$. Quel est le sous-ensemble de nombres divisibles par 3, dans A ? Quel est le sous-ensemble de nombres divisibles par 2 ? Et divisibles par 1 ?

- **Exercice 4**

  On donne les ensembles A=$\{$a ; b ; c$\}$; B=$\{$b ; d$\}$ et C=$\{$a ; b$\}$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse :

  $$A \supset B, \quad A \supset C, \quad C = B, \quad A \neq C, \quad \varnothing \subset B.$$

• **Exercice 5**

En utilisant le concept d'ensemble, interpréter la signification des phrases suivants :

"Les nombres pairs sont divisibles par 4."

"Les nombres divisibles par 4 sont pairs."

Est-ce que ces deux affirmations sont toutes les deux vraies ?

• **Exercice 6**

"Charly est un chien, tous les chiens sont mammifères, donc Charly est....". Compléter le raisonnement en utilisant les diagrammes des ensembles.

— Peut-on dire que "si un animal n'est pas un mammifère, alors il n'est pas un chien" ?
— Et que "tous les mammifères sont des chiens" ? Justifier.

• **Exercice 7**

"Chaque carré est aussi un rectangle, et tous les rectangles sont des parallélogrammes. Donc tous les carrés sont des parallélogrammes". Cette affirmation est-elle vraie ? Justifie en utilisant les diagrammes des ensembles.

6.3 Les opérations avec les ensembles

- **Exercice 1**

  Trouver l'intersection entre les ensembles A=$\{3\,;\ 6\,;\ 9\,;\ 12\}$ et B=$\{3\,;\ 12\,;\ 48\}$. Montrer avec les différentes représentations le résultat de cette opération.

- **Exercice 2**

  Trouver $A \cap (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cap C$ pour les ensembles A=$\{1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\}$, B=$\{2\,;\ 5\,;\ 6\}$ et C=$\{3\,;\ 2\,;\ 4\}$.

- **Exercice 3**

  Considérer l'ensemble A des points d'un carré, B l'ensemble des points de la droite passant par deux sommets opposés de ce carré et C l'ensemble des points de la droite passant par deux sommet adjacents. Représenter $A \cap B$ et $A \cap C$.

- **Exercice 4**

  Considérer l'ensemble A des points d'un cercle de centre O et rayon r, l'ensemble B des points d'un cercle de centre Q et rayon s. Trouver $A \cap B$ dans les trois cas possibles :
  — $\overline{OQ} > r + s$;
  — $\overline{OQ} < r + s$;
  — $\overline{OQ} = r + s$;

- **Exercice 5**

  Représenter les deux ensembles suivants ainsi que leur intersection et leur union :
  A= $\{\ x \in \mathbb{N}$ / *x est un diviseur de 12* $\}$;
  B= $\{\ x \in \mathbb{N}$ / *x est un diviseur de 15* $\}$.

- **Exercice 6**

On donne les ensembles :
$A = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ 4 < x < 9\ \}$;
$B = \{\ x \in \mathbb{N}\ /\ 2 < x \leq 6\ \}$;
$C = \{\ 10\,;\ 20\,;\ 40\ \}$.
Déterminer : $A \cup (B \cap C)$; $A \cap (B \cup C)$; $B \cup (A \cap C)$;
$B \cap (A \cup C)$; $C \cup (A \cap B)$; $C \cap (A \cup B)$.

- **Exercice 7**

1. Donner une représentation tabulaire de l'ensemble A des multiples de 2, et de l'ensemble B des multiples de 3 ainsi que de l'ensemble C intersection de A et B.
2. Représenter A , B et C avec des diagrammes d'ensembles.
3. Peux tu donner une représentation caractéristique de C?
4. Faire de même en prenant $A = \{\ n \in \mathbb{N}\ /\ n \textit{ est multiple de } 2\ \}$ et $B = \{\ n \in \mathbb{N}\ /\ n \textit{ est multiple de } 4\ \}$.
5. Faire de même en prenant $A = \{\ n \in \mathbb{N}\ /\ n \textit{ est multiple de } 3\ \}$ et $B = \{\ n \in \mathbb{N}\ /\ n \textit{ est multiple de } 5\ \}$.

- **Exercice 8**

Considérer :
— l'ensemble $\mathcal{U}$ des quadrilatères ;
— l'ensemble T des trapèzes ;
— l'ensemble P des parallélogrammes ;
— l'ensemble L des losanges ;
— l'ensemble R des rectangles ;
— l'ensemble C des carrés ;
Représenter tous ces ensembles au moyen des diagrammes d'ensembles ; dessiner des exemples de quadrilatères appartenants à chaque partition de $\mathcal{U}$.

- **Exercice 9**

Représenter l'ensemble A des nombres impairs et l'ensemble B de nombres premiers dans l'ensemble $\mathcal{U}$ de nombres naturels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier :
$B \subset A$, $A \subset B$, $\overline{A} \subset \overline{B}$, $\overline{B} \subset \overline{A}$.

• **Exercice 10**

Vérifier, avec des diagrammes d'ensembles, que si $B \subset A$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ (contraposée), dans un ensemble univers donné. Quel est la signification de cela dans le langage parlé ?

• **Exercice 11**

En utilisant le concept d'ensemble, interpréter la signification des phrases suivants :

"Les nombres divisibles par 3 sont divisibles par 6."

"Les nombres divisibles par 6 sont divisibles par 3."

Laquelle de ces deux affirmations est vraie et quelle est sa contraposée ?

• **Exercice 12**

Prenons l'hypothèse que l'on puisse définir, dans l'ensemble univers des situations de la vie, l'ensemble de problèmes A, et son sous-ensemble B des problèmes qui ont au moins une solution. Représenter ces ensembles avec un diagramme. Dire quelle phrase francaise peut traduire le fait que $B \subset A$, et quelle phrase peut traduire sa contraposée : $\overline{A} \subset \overline{B}$.

- **Exercice 13**

Considérons $\mathcal{U}$ l'ensemble de la population de Genève, D l'ensemble des personnes diplômées vivant à Genève, M l'ensemble des personnes mariées vivant à Genève. Pour chaque répresentation graphique ci-dessous, dire quel ensemble est réprésenté dans la partie grisée. Par exemple :

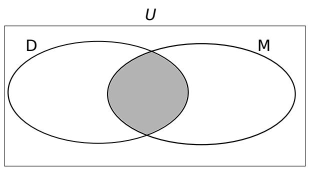


FIGURE 1 – $D \cap M$= ensembles des genevois diplômés et mariés.

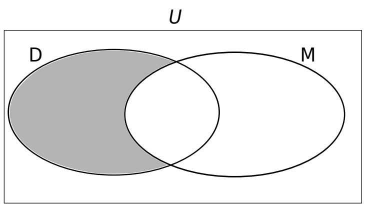


Fig.2

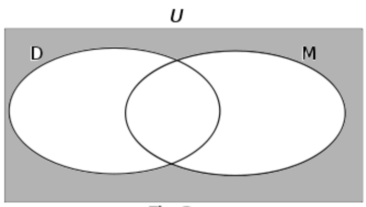


Fig.3

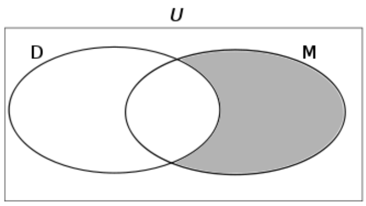


Fig.4

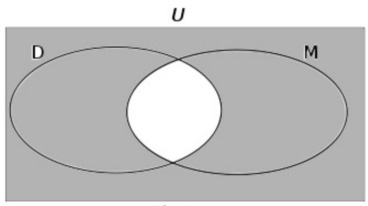


Fig.5

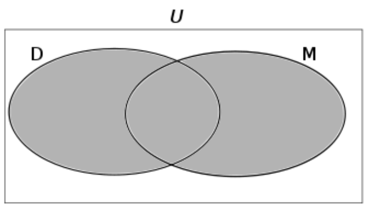


Fig.6

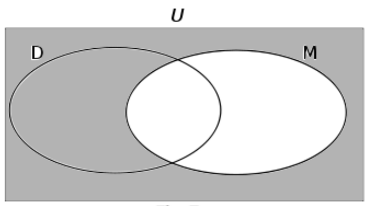


Fig.7

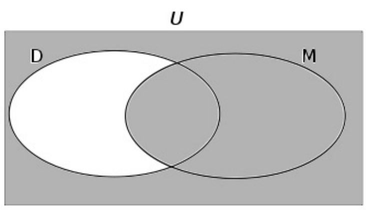


Fig.8

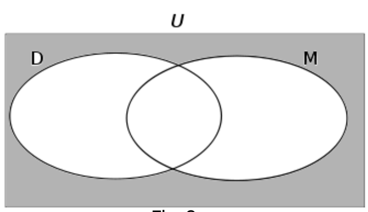


Fig.9

• **Exercice 14**

Si l'on affirme que "Chaque livre scientifique est intéressant", laquelle des phrases suivantes peut être déduite à partir de cette affirmation ?

1. "Si un livre est scientifique, alors il est intéressant" ;
2. "Si un livre est intéressant, alors il est scientifique" ;
3. "Tout livre intéressant est scientifique"
4. "Si un livre n'est pas intéressant, alors il n'est pas scientifique" ;
5. "Si un livre n'est pas scientifique, alors il n'est pas intéressant" ;
6. "Quelque livre intéressant est scientifique" ;
7. "Il existe des livres intéressants, bien qu'ils ne soient pas scientifiques".

Utiliser les diagrammes d'ensembles pour s'aider, en indiquant avec S l'ensemble des livres scientifiques, et avec I l'ensemble des livres intéressants (si l'on admet l'existence d'un critère pour définir un livre intéressant).

• **Exercice 15**

En utilisant les diagrammes d'ensembles, expliquer la différence entre les deux phrases dans chacun des cas suivants :

1. "J'écris ce que je pense" et "Je pense ce que j'écris" ;
2. "Quand je cours, je me fatigue" et "Quand je me fatigue, je cours" ;
3. "Le sport est un loisir" et "Le loisir est un sport".

Utiliser les diagrammes d'ensembles pour s'aider : dans le cas 1 indiquer avec E l'ensemble des choses que j'écris, et avec P l'ensemble des choses que je pense. Dans le cas 2 indiquer avec C l'ensemble des moments où je cours, et avec F l'ensemble des moments où je me fatigue. Enfin dans le cas 3 indiquer avec S l'ensemble des sports, et avec L l'ensemble des loisirs.

- **Exercice 16***

  Représenter avec des diagrammes cette affirmation : “Tous les triangles ABC rectangles en A, ont la propriété que $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$”.

  — Peut-on dire que “si dans un triangle ABC, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 \neq \overline{BC}^2$ alors le triangle n’est pas rectangle en A” ?

  — Et que “tous les triangles ABC tels que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ sont rectangles en A” ? Justifier.

- **Exercice 17***

  Représenter géométriquement, dans le même dessin, les ensemble numériques suivants :
  $\mathbb{N}$= { *x est nombre naturel* } ;
  $\mathbb{Z}$ = { *x est nombre entier relatif* } ;
  $\mathbb{Q}$ = { *x est nombre rationnel relatif* } ;
  $\mathbb{R}$= { *x est nombre réel* }.

  1. Donner l’exemple d’un nombre n tel que $n \in \mathbb{Z}$ et $n \notin \mathbb{N}$, et le placer dans le graphique.
  2. Donner l’exemple d’un nombre p tel que $p \in \mathbb{Q}$ et $p \notin \mathbb{Z}$, et le placer dans le graphique.
  3. Donner l’exemple d’un nombre r tel que $r \in \mathbb{R}$ et $r \notin \mathbb{Q}$, et le placer dans le graphique. Comment appelle-t-on ce type de nombres ?

7 Glossaire des symboles

symbole	signification	paragraphe et page
$\in$	appartient à	§I , p.4
$\notin$	n' appartient pas à	§I , p.4
$\varnothing$ ou $\{\}$	ensemble vide	§3.3, p.8
$\mathcal{U}$	ensemble univers	§3.4, p.8
$\subseteq$	est inclus dans	§4, p.9
$\supseteq$	contient	§4, p.9
$\subset$	est strictement inclus dans	§4.1, p.9
$\supset$	contient strictement	§4.1, p.9
$\cap$	intersection	§5.1, p.10
$\cup$	union	§5.2, p.11
$C_U A$ ou $\bar{A}$	complémentaire de A par rapport à $\mathcal{U}$	§5.3, p.11